

אנליזה למורי תיכון, אוסף בעיות 1

14 בנובמבר 2009

1 סדרות קושי

תהי (x_n) סדרה של מספרים ממשיים. נאמר ש- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n, m > N$ מתקיים $|x_n - x_m| < \epsilon$. הוכיחו את הסעיפים הבאים:

1. אם x_n סדרה מתכנסת, כלומר אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, אז x_n סדרת קושי.

2. אם x_n סדרת קושי, ואם יש ל- x_n תת-סדרה המתכנסת לגבול L , אז x_n כולה מתכנסת לגבול L . הדרכה: בעזרת הגדרת הגבול מצאו נקודה שהחל ממנה כל אברי תת-הסדרה קרובים ל- L , ובעזרת קריטריון קושי מצאו נקודה שהחל ממנה כל אברי הסדרה קרובים לאברי תת-הסדרה.

3. אם x_n סדרת קושי אז x_n חסומה.

4. אם x_n סדרת קושי אז x_n מתכנסת לגבול L . הדרכה: השתמשו בסעיף 3 ובמשפט שנלמד בהרצאה כדי לקבל תת-סדרה מתכנסת, ואז בסעיף 2 כדי להסיק שהסדרה כולה מתכנסת לאותו הגבול.

מסעיפים 1-4 אנו למדים שסדרת מספרים ממשיים היא מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. על מרחב שבו מתקיימת שקילות זו אומרים שהוא מרחב שלט.

2 פולינומים וקצבי גידול

על פונקציה $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נאמר שהיא פולינום מדרגה d אם היא נתונה ע"י הנוסחה

$$P(x) = \sum_{k=0}^d c_k x^k.$$

כאשר $c_d \neq 0$.

1. הוכיחו שאם P פולינום ממעלה חיובית, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \pm \infty$. כיצד נקבע הסימן?

2. הוכיחו שאם P פולינום ממעלה חיובית, אז הסדרה $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ היא מונוטונית החל ממקום מסויים. כלומר, קיים N כך שלמעט אולי N אברי הסדרה הראשונים, הסדרה היא מונוטונית. הדרכה: מספיק להראות שסדרת הפרשים $P(n+1) - P(n)$ היא

חיובית החל ממקום מסויים (אז הסדרה שלנו תהיה עולה) או שלילית החל ממקום מסויים (אז הסדרה שלנו תהיה יורדת). נסו לחשב את הגבול של סדרת הפרשים. אם הגבול הוא $\pm\infty$, אז החל ממקום מסויים הסדרה תהיה תמיד חיובית (וגדולה מאוד) או שלילית (וקטנה מאוד).

3. יהיו נתונים פולינומים P, Q . חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

במונחים של מקדמי הפולינומים. הדרכה: נסו לחלק את המונה ואת המכנה בחזקה מסויימת של x ולהשתמש במשפטי האריתמטיקה של גבולות.

כאשר הגבול בסעיף 3 הוא מספר ממשי שונה מאפס, אומרים שלפונקציות P, Q יש קצב גידול זהה. כאשר הגבול הוא אפס, אומרים ש- Q גדלה מהר יותר, וכאשר הגבול הוא אינסוף אומרים ש- P גדלה מהר יותר.