# אנליזה למורי תיכון, אוסף בעיות 2

19 בנובמבר 2009

## שאלה 1

נאמר שאיבר בסדרה היא קיצון אם הוא מקסימלי (כלומר גדול או שווה לכל איבר אחר) או מינימלי (כלומר קטן או שווה לכל איבר אחר). האם בכל סדרה יש איבר קיצון? האם בכל סדרה מתכנסת יש איבר קיצון?

## שאלה 2

נגדיר סדרה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ לפי הכלל הרקורסיבי הבא:

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$$

עם תנאי ההתחלה $x_0 = 1$. הוכיחו שהסדרה $x_n$ מתכנסת, וחשבו את הגבול. הדרכה:

1. ראשית הניחו שקיים גבול L. בעזרת משפט האריתמטיקה של גבולות, הסיקו ש־L מקיים משוואה ריבועית. אחד משני השורשים הוא שלילי ולכן אינו מועמד להיות הגבול (למה?). לכן המועמד היחיד הוא השורש החיובי, ומעתה נסמן מועמד זה ב־$L$.
2. הוכיחו באינדוקציה שכל אברי הסדרה חסומים בין $0$ לבין $L$.
3. הוכיחו באינדוקציה, בעזרת הסעיף השני, שהסדרה מונוטונית.
4. סיימו את ההוכחה.

## שאלה 3

לכל אחת מהפונקציות הבאות בדקו האם קיימים (ואם כן חשבו) גבולות חד־צדדיים וגבול דו־צדדי כאשר $x \to 0$ וכאשר $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\frac{1}{x}) \\ g(x) &= x\sin(\frac{1}{x}) \\ h(x) &= \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

## שאלה 4

נתבונן בסדרה $(H_n)_n \in \mathbb{N}$ הבאה:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

סדרה זו נקראת הסדרה ההרמונית. הוכיחו ש־$H_n \to \infty$.

## שאלה 5

נתבונן בסדרה $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ הבאה:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה. רמז: חשבו כמה מאברי הסדרה הראשונים, ונחשו מה הוא האיבר הכללי. לאחר מכן הוכיחו את הניחוש, למשל באמצעות אינדוקציה.

## שאלה 6

יהי $s$ ממשי. נתבונן בהכללה $(H_n^s)_n \in \mathbb{N}$ של הסדרה ההרמונית:

$$H_n^s = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}.$$

הגבול של הסדרה הנ"ל, אם היא מתכנסת, מסומן $\zeta(s)$. הפונקציה $\zeta$ נקראת פונקצית הזטא של אוילר. הוכיחו שעבור $s \geq 2$ הסדרה מתכנסת. הדרכה: טפלו קודם במקרה $s = 2$. הראו שבמקרה זה הסדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת. כדאי להיעזר בשאלה 5.